

---

# Kształtowanie krzywej przejściowej u podstawy zęba w aspekcie minimalizacji naprężeń zginających

MAREK MARTYNA  
JAN ZWOLAK

Koła zębate, jako elementy maszyn przenoszące najczęściej zmienne wartości momentów obrotowych, narażone są między innymi na działanie naprężeń zginających u podstawy zęba. Naprężenia zginające kwalifikowane są jako najbardziej dotkliwe w skutkach podczas eksploatacji kół zębatych, gdyż powodują złamanie zęba.

Parametrem geometrycznym zawierającym w sobie informacje o odporności zęba na naprężenia zginające jest współczynnik kształtu zęba  $Y_{Fr}$ , którego wartość liczbową powinna być jak najmniejsza. W obliczeniach współczynnika kształtu zęba największe znaczenie mają dwie wielkości geometryczne:  $h_{Fe}$  – ramię momentu gnącego dla naprężenia u podstawy zęba w przypadku przyłożenia siły w zewnętrznym punkcie jednoparowego przyporu,  $S_{Fn}$  – grubość stopy zęba w przekroju obliczeniowym mierzona po cięciwie. Wysokość ramienia momentu gnącego  $h_{Fe}$ , jak i grubość stopy zęba w przekroju obliczeniowym  $S_{Fn}$  zależna jest od przyjętej metody obliczeń. W prezentowanej pracy stosowana jest metoda B wg normy ISO 6336.

Według tej metody grubość stopy zęba  $S_{Fn}$  jest miarą odcinka wyznaczonego przez dwa punkty, w których styczne do krzywej przejściowej nachylone są do osi zęba pod kątem  $30^\circ$ . Liczne badania własne autorów wskazują, że w przypadku krzywej przejściowej jednoelementowej, naprężenia zginające u podstawy zęba osiągają wartości maksymalne w miejscu, w którym mierzona jest grubość stopy

zęba  $S_{Fn}$ . W tym samym miejscu występują pierwsze mikropęknięcia przy stopie zęba i dalszy wzrost szczeliny aż do osiągnięcia długości krytycznej, powodującej złamanie zęba. Istotnym czynnikiem wpływającym na obniżenie naprężeń zginających będzie tu promień krzywej przejściowej  $\rho_F$  w przekroju obliczeniowym.

W przypadku krzywej przejściowej wieloelementowej z protuberancją (z podcięciem), grubość stopy zęba  $S_{Fn}$  będzie mniejsza w porównaniu z grubością stopy zęba o krzywej przejściowej jednoelementowej. Mniejsza grubość stopy zęba powoduje wzrost współczynnika kształtu zęba  $Y_{Fr}$ , a tym samym wzrost naprężeń zginających, przyczyniających się do powstawania pęknięć u podstawy, prowadzących do złamania zęba.

Kształtowanie krzywej przejściowej u podstawy zęba jest zatem ważnym etapem w projektowaniu kół zębatych i powinno być poprzedzone szeroką analizą geometryczną i wytrzymałościową z zastosowaniem metod numerycznych.

W dalszej części pracy zostanie przedstawiony fragment analizy wpływu promienia krzywej przejściowej na wartość naprężeń zginających, wyznaczonych w przekroju obliczeniowym  $S_{Fn}$ .

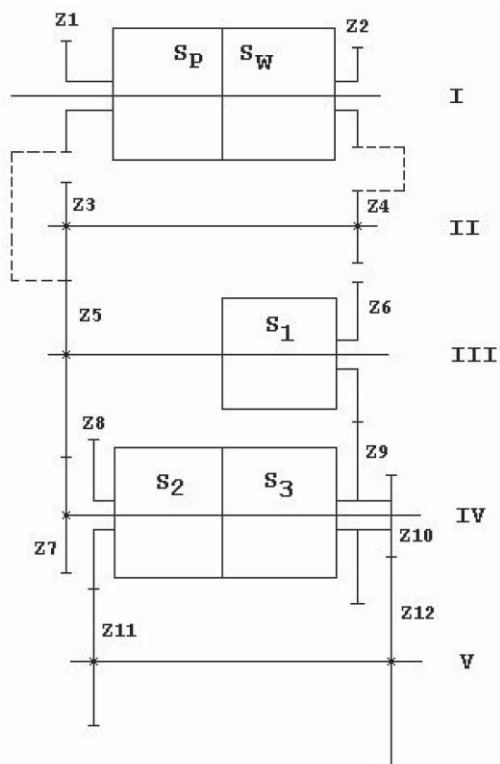
## Charakterystyka przedmiotu badań

Przedmiotem badań były koła zębate tworzące przekładnię power shift. Schemat kinematyczny przekładni przedstawiono na rys. 1.

Struktura wewnętrzna rozpatrywanej przekładni zawiera 12 kół zębatych tworzących 7 par, 5 wałków, 3 sprzęgła biegowe i 2 sprzęgła kierunkowe.

---

*Dr inż. Marek Martyna jest pracownikiem Huty Stalowa Wola S.A., a dr hab. inż. Jan Zwolak jest pracownikiem Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie.*

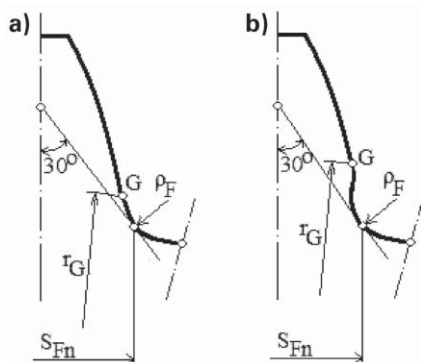


Rys. 1. Schemat kinematyczny 6-biegowej przekładni power shift

Analizie geometrycznej i wytrzymałościowej (pod względem wytrzymałości na zginanie) poddano koła zębate o następujących parametrach geometrycznych:

$z_1=34,$	$m=5,973,$	$x_1=0,012,$
$z_2=29,$	$m=6,458,$	$x_2=0,178,$
$z_3=34,$	$m=5,973,$	$x_3=0,165,$
$z_4=29,$	$m=6,458,$	$x_4=0,149,$
$z_5=52,$	$m=5,973,$	$x_5=0,177,$
$z_6=40,$	$m=6,339,$	$x_6=0,184,$
$z_7=38,$	$m=5,973,$	$x_7=0,172,$
$z_8=44,$	$m=6,317,$	$x_8=0,264,$
$z_9=50,$	$m=6,339,$	$x_9=0,141,$
$z_{10}=26,$	$m=6,246,$	$x_{10}=0,242,$
$z_{11}=31,$	$m=6,246,$	$x_{11}=0,297,$
$z_{12}=49,$	$m=6,246,$	$x_{12}=0,130,$

Kąt zarysu dla wszystkich kół zębatych przyjmuje jednakową wartość i wynosi  $\alpha_0 = 25^\circ$ .



Rys. 2. Rodzaje krzywych przejściowych: a) jednoelementowa, b) wieloelementowa z protuberancją (z podcięciem)

Rozpatrywano koła zębate o dwóch rodzajach krzywych przejściowych przedstawionych na rys. 2.

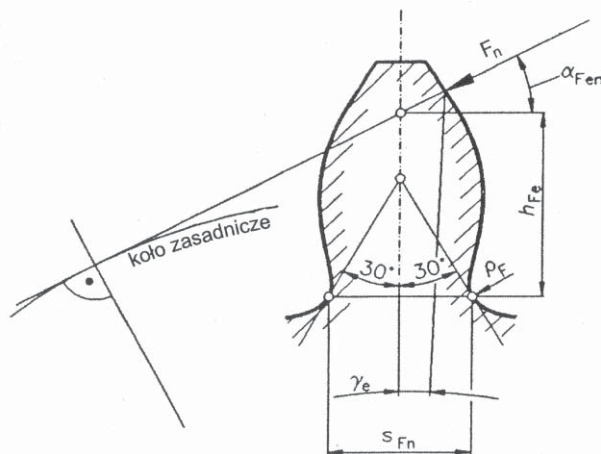
Punkt G na rys. 2 oznacza punkt graniczny, w którym styka się krzywa przejściowa stopy zęba z początkiem ewolwenty. Promień  $r_G$  jest promieniem granicznym. Grubość stopy zęba w przekroju obliczeniowym oznaczono przez  $S_{Fn}$ , natomiast promień krzywej przejściowej w tymże przekroju – symbolem  $\rho_F$ .

### Parametry geometryczne zęba a naprężenia zginające

Jedną z podstawowych wielkości wpływających na wartość liczbową naprężeń zginających jest współczynnik kształtu zęba [1, 2, 3] obliczany według wzoru:

$$Y_F = \frac{6 \left( \frac{h_{Fe}}{m_n} \right) \cos \alpha_{Fen}}{\left( \frac{S_{Fn}}{m_n} \right)^2 \cos \alpha_n} \quad (1)$$

Niektóre parametry występujące we wzorze (1) jako wielkości geometryczne zostały przedstawione na rys. 3. Przyjęte oznaczenia na rys. 3 określane są jako:  $F_n$  – siła obciążająca ząb i działająca na kierunku



Rys. 3. Przekrój obliczeniowy stopy zęba  $S_{Fn}$  według metody B ISO 6336

stycznym do koła zasadniczego, przyłożona w zewnętrznym punkcie jednoparowego przyporu,  $\alpha_{Fen}$  – kąt przyłożenia siły,  $h_{Fe}$  – ramię momentu gnącego dla naprężenia u podstawy zęba w przypadku przyłożenia siły w zewnętrznym punkcie jednoparowego przyporu,  $S_{Fn}$  – grubość stopy zęba w przekroju obliczeniowym mierzona po cięciwie,  $\gamma_e$  – wielkość kątowa pomocnicza związana ze średnicą okręgu przechodzącego przez punkt przyłożenia siły,  $\rho_F$  – promień krzywej przejściowej w przekroju obliczeniowym, który jest tu parametrem zmiennym, wpływającym na wartość liczbową naprężeń zginających  $\sigma_F$ . Wzór (1) zawiera jeszcze dwie wielkości, które nie mogą być pokazane na rys. 3. Są to:  $m_n$  – moduł normalny oraz  $\alpha_n$  – kąt przyporu normalny na walcu podziałowym.

Promień krzywej przejściowej  $\rho_F$  w przekroju obliczeniowym, zgodnie z normą ISO 6336 [3], będzie wyznaczony według wzoru:

$$\rho_F = m_n \left[ \frac{\rho_{fp}}{m_n} + \frac{2G^2}{\cos \vartheta (z \cos^2 \vartheta - 2G)} \right] \quad (2)$$

Występujący we wzorze (2) promień krzywej przejściowej zarysu odniesienia  $\rho_{fp}$  może przyjmować różne wartości [4, 5] i obliczany jest według wzoru:

$$\rho_{fp} = \frac{C_0 m}{1 - \sin \alpha_0} \quad (3)$$

Wielkości występujące we wzorze (3) oznaczają:  $C_0$  – współczynnik luzu wierzchołkowego,  $m$  – moduł narzędzia,  $\alpha_0$  – kąt zarysu. Parametry pomocnicze  $G$  i  $\mathcal{G}$ , występujące we wzorze (2), wyznacza się według wzorów:

$$G = \frac{\rho_{fp}}{m_n} - \frac{h_{fp}}{m_n} + x \quad (4)$$

$$\mathcal{G} = \frac{2G}{z} \operatorname{tg} \vartheta - H \quad (5)$$

We wzorze (5) pojawiła się wielkość pomocnicza  $H$ , która jest obliczana według wzoru:

$$H = \frac{2}{z} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - \frac{\pi}{3} \quad (6)$$

Oznaczenie „ $z$ ” występujące we wzorze (2) i we wzorze (5) oraz (6) wyraża liczbę zębów koła zębatego, natomiast przez „ $x$ ” we wzorze (4) oznaczono współczynnik przesunięcia zarysu (współczynnik korekcji). Inną wielkość pomocniczą  $E$ , którą zawiera wzór (6), oblicza się według zależności:

$$E = \frac{\pi}{4} m_n - h_{fp} \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{S_{pr}}{\cos \alpha_n} - (1 - \sin \alpha_n) \frac{\rho_{fp}}{\cos \alpha_n} \quad (7)$$

Oznaczenie  $S_{pr}$  we wzorze (7) wyraża głębokość protuberancji (podcięcia) stopy zęba, która ma znaczący wpływ na naprężenia zginające  $\sigma_F$  i jest przyjmowana przez konstruktora. Głębokość protuberancji powinna być brana pod uwagę w obliczeniach wytrzymałościowych stopy zęba na etapie projektowania, z równoczesnym uwzględnieniem możliwości technologicznych w procesie obróbki wykończeniowej kół zębatych.

## Wyniki badań numerycznych

Badania numeryczne polegały na przeprowadzeniu obliczeń naprężeń zginających, z wykorzystaniem autorskiego programu [6], we wszystkich kołach zębatych tworzących przekładnię power shift zamieszczoną na rys. 1, dla dwóch rodzajów krzywych przejściowych (krzywa przejściowa jednoelementowa

**TABELA I. Krzywa przejściowa bez protuberancji, para zębata:  $z_1/z_5$**

Koła zębata: $z_1, z_5$	Promień krzywej przejściowej, mm		Naprężenia zginające, MPa	
$\rho_{fp}$ , mm	$\rho_{F1}$	$\rho_{F5}$	$\sigma_{F1}$	$\sigma_{F5}$
0,20 m	2,1839	1,9833	356	379
0,25 m	2,6771	2,2011	342	361
0,30 m	2,8714	2,4229	330	344
0,35 m	3,0695	2,6483	318	330
0,40 m	3,2714	2,8777	307	316
0,45 m	3,4774	3,1109	296	304
0,50 m	3,6876	3,3483	286	292

oraz krzywa przejściowa wieloelementowa z protuberancją), przy siedmiu wartościach promienia krzywizny  $\rho_F$  w przekroju obliczeniowym. Jednakże ograniczona objętość pracy pozwala na przedstawienie wyników dla czterech kół:  $z_1, z_5, z_{10}, z_{12}$ , tworzących parę zębatą wejściową  $z_1:z_5$  oraz parę zębatą wyjściową  $z_{10}:z_{12}$ . Parę zębatą wejściową obciążono momentem obrotowym  $M = 2000$  Nm, przy prędkości obrotowej  $n = 1800$  obr/min.

Wyniki obliczeń naprężeń zginających dla koła  $z_1$  i  $z_5$ , w zależności od krzywej przejściowej i jej promienia  $\rho_{F1}$  i  $\rho_{F5}$ , w przekroju obliczeniowym przedstawiono w tab. I i II.

Na podstawie wyników  $\sigma_{F1}$  i  $\rho_{F1}$  (zawartych w tabelach I i II) dotyczących koła zębatego  $z_1$ , którego zęby mają krzywą przejściową bez protuberancji i z protuberancją, wykonano zestawienia na wykresach słupkowych umieszczonych na rys. 4.

Dalsze wyniki obliczeń dotyczące koła  $z_{10}$  i  $z_{12}$ , w zależności od krzywej przejściowej i jej promienia  $\rho_{F10}$  i  $\rho_{F12}$  w przekroju obliczeniowym przedstawiono w tabelach III i IV.

**TABELA II. Krzywa przejściowa z protuberancją, para zębata:  $z_1/z_5$**

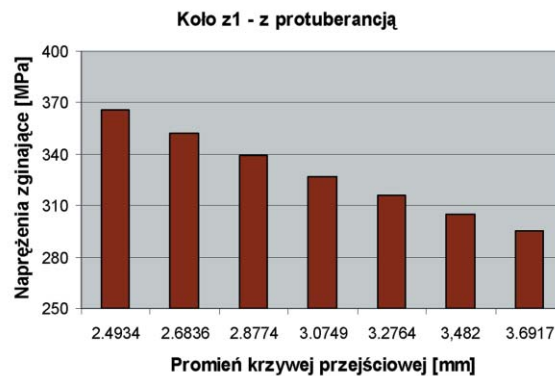
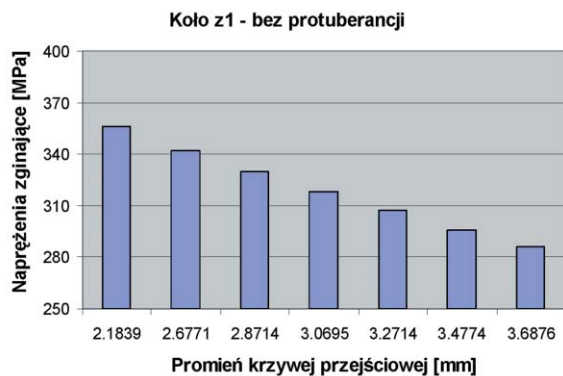
Koła zębata: $z_1, z_5$	Promień krzywej przejściowej, mm		Naprężenia zginające, MPa	
$\rho_{fp}$ , mm	$\rho_{F1}$	$\rho_{F5}$	$\sigma_{F1}$	$\sigma_{F5}$
0,20 m	2,4934	1,9864	366	389
0,25 m	2,6836	2,2042	352	371
0,30 m	2,8774	2,4256	339	354
0,35 m	3,0749	2,6508	327	339
0,40 m	3,2764	2,8799	316	325
0,45 m	3,4820	3,1129	305	313
0,50 m	3,6917	3,3500	295	301

**TABELA III. Krzywa przejściowa bez protuberancji, para zębata:  $z_{10}/z_{12}$**

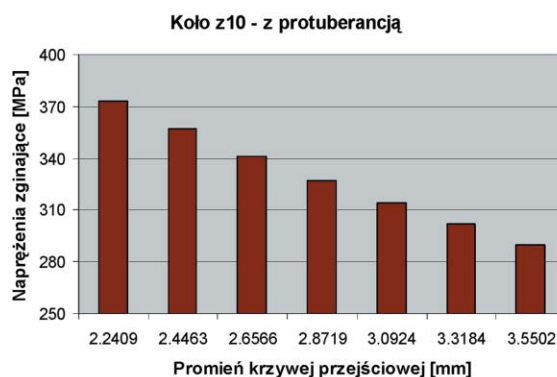
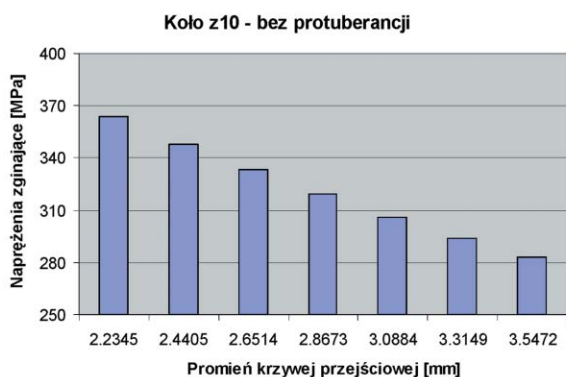
Koła zębata: $z_{10}, z_{12}$	Promień krzywej przejściowej, mm		Naprężenia zginające, MPa	
$\rho_{fp}$ , mm	$\rho_{F10}$	$\rho_{F12}$	$\sigma_{F10}$	$\sigma_{F12}$
0,20 m	2,2345	2,1812	364	381
0,25 m	2,4405	2,4037	348	365
0,30 m	2,6514	2,6298	333	350
0,35 m	2,8673	2,8598	319	336
0,40 m	3,0884	3,0939	306	323
0,45 m	3,3149	3,3320	294	312
0,50 m	3,5472	3,5743	283	301

**TABELA IV. Krzywa przejściowa z protuberancją, para zębata:  $z_{10}/z_{12}$**

Koła zębata: $z_{10}, z_{12}$	Promień krzywej przejściowej, mm		Naprężenia zginające, MPa	
$\rho_{fp}$ , mm	$\rho_{F10}$	$\rho_{F12}$	$\sigma_{F10}$	$\sigma_{F12}$
0,20 m	2,2409	2,1852	373	392
0,25 m	2,4463	2,4073	357	375
0,30 m	2,6566	2,6331	341	359
0,35 m	2,8719	2,8628	327	345
0,40 m	3,0924	3,0965	314	333
0,45 m	3,3184	3,3343	302	321
0,50 m	3,5502	3,5764	290	310



Rys. 4. Naprężenia zginające w zależności od promienia krzywej przejściowej



Rys. 5. Naprężenia zginające w zależności od promienia krzywej przejściowej

Wyniki  $\sigma_{F10}$  i  $\rho_{F10'}$  zawarte w tabelach III i IV, odnoszące się do zębów koła zębatego  $z_{10}$  z krzywą przejściową bez protuberancji i z protuberancją przedstawiono na rys. 5.

## Podsumowanie

Analiza wartości liczbowych naprężeń zginających, w zależności od krzywej przejściowej stopy zęba i jej promienia krzywizny w przekroju obliczeniowym, umożliwia wprowadzenie wartościowania stosowanych metod obróbki zębów w procesie wytwarzania kół zębatych.

W przedstawionej pracy wartościowanie odbywa się przez odniesienie (na wybranych parach zębatych  $z_1:z_5$  oraz  $z_{10}:z_{12}$ ) wyznaczonych naprężeń zginających:  $\sigma_{F1'}$ ,  $\sigma_{F5'}$ ,  $\sigma_{F10}$  i  $\sigma_{F12}$  do wartości promienia krzywej przejściowej w przekroju obliczeniowym stopy zęba, w poszczególnych kołach zębatych.

Porównując wartości liczbowe naprężeń w poszczególnych kołach zębatych i promieni odpowiednich krzywych przejściowych w przekroju obliczeniowym, można zauważyć, że wzrost promienia wywołuje podobny wpływ na obniżenie naprężeń w przypadku krzywej przejściowej bez protuberancji, jak i z protuberancją.

Przy jednakowych promieniach krzywizny rozpatrywanej pary zębatej, krzywa przejściowa jednoelementowa bez protuberancji zapewnia mniejszą wartość naprężeń zginających u podstawy zęba aniżeli krzywa przejściowa wieloelementowa z protuberancją.

Wybór krzywej przejściowej powinien jednak wynikać z możliwości technologicznych zakładu wy-

tworzącego koła zębate, a szczególnie podczas operacji stosowanych w obróbce wykończeniowej powierzchni ewolwentowych zębów nawęglanych i hartowanych.

Konstruktor dokonujący wyboru krzywej przejściowej stopy zęba, który posiada wyniki zawarte w tabelach I – IV, może wywierać wpływ na prace koncepcyjne konstruktora narzędzi do obróbki kół zębatych, np. ślimakowych frezów obwodniowych, z odpowiednim promieniem naroża ostrza skrawającego.

Warunkiem wiarygodności obliczeń naprężeń zginających u podstawy zęba jest spójność działania w zakresie konstrukcji kół zębatych, w zakresie narzędzi stosowanych w obróbce uzębienia oraz technologii wykonania (zęby frezowane na gotowo, zęby wiórkowane, zęby szlifowane).

## LITERATURA

1. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: Przekładnie walcowe. WKŁ, Warszawa 1995.
2. Rybak J., Wiktor J.: Uwarunkowanie wytrzymałościowe kształtu krzywej przejściowej u podstawy zęba. Przegląd Mechaniczny nr 4, 1989.
3. ISO 6336/1 – III; 1996: Calculation of load capacity of spur and helical gears.
4. Pedrero J. I., Garcia – Masia C., Fuentes A.: Optimization of gear design by parametric analysis. International Congress Gear Transmissions' 95, Sofia 1995.
5. Muller L.: Przekładnie zębate. Projektowanie. WNT, Warszawa 1996.
6. Martyna M., Zwolak J.: Program PRZEKŁADNIA (<http://www.gearbox.com.pl>).